

TRANSFERTS THERMIQUES CONDUCTIFS ET CONDUCTO-CONVECTIFS

Sommaire

I	Présentation des différents modes de transferts thermiques	3
I.1	Convection	3
I.2	Rayonnement	3
I.3	Diffusion ou conduction thermique dans les solides	3
II	Loi de Fourier	4
II.1	Flux thermique - flux thermique surfacique	4
II.2	Vecteur densité volumique de flux thermique	5
II.3	Champ de température - équilibre thermodynamique local (ETL)	6
II.4	Loi de Fourier (phénoménologique)	7
	a - Enoncé	7
	b - Propriétés essentielles	7
III	Les équations de la chaleur	8
III.1	Système thermique élémentaire - capacité thermique	8
III.2	Ecriture du Premier Principe	9
	a - Enoncé général	9
	b - Enoncé "détaillé" : avec sources et puits (apport énergétique volumique)	10
III.3	Bilans locaux d'énergie et établissement de l'équation de diffusion thermique à 1D	10
	a - Géométrie cartésienne 1D	10
	b - Géométrie cylindrique	12
	c - Géométrie sphérique	14
	d - Cas général 3D	14
	e - Propriétés de l'équation de diffusion thermique	15
	f - Conditions initiales et aux limites en 1D - conditions aux limites classiques	15
	g - Temps caractéristique de la diffusion : analyse dimensionnelle et nombre de Fourier	16

III.4	Création d'entropie par diffusion thermique	17
III.5	Résolution de l'équation de la chaleur	18
	a - Exemple (très simple) de résolution analytique en régime permanent : barreau 1D	18
	b - Exemple (simple!) de résolution numérique en régime non permanent : «choc thermique» sur un barreau 1D	19
IV	Résistance et conductance thermiques en RP/ARQS thermique	19
IV.1	Expressions	19
	a - Système de géométrie cartésienne	19
	b - Système de géométrie cylindrique	20
	c - Système de géométrie sphérique	21
IV.2	Lois d'association	21
IV.3	Analogie importante : conduction thermique et électrique	23
V	Conducto-convection	23
V.1	Flux convectif et coefficient conducto-convectif h	23
	a - Loi de Newton	23
	b - Résistance conducto-convective	24
V.2	Concurrence conducto-convection et conduction : le nombre de Biot	25
VI	Applications	26
VI.1	Exemple 1 : température d'une cave (ondes thermiques)	26
VI.2	Exemple 2 : expérience d'Ingenhousz (à faire en "live" !!!)	27

I Présentation des différents modes de transferts thermiques

I.1 Convection

La convection est un mode de transfert thermique impliquant un déplacement macroscopique de matière, en général des fluides liquides ou gazeux.

L'exemple le plus courant est le cas du chauffage par convection dont le principe est basé sur la différence de densité de masses d'air portées à des températures différentes. Ainsi, les masses d'air les moins denses ont tendance à s'élever au dessus des masses d'air les plus froides qui sont plus denses. Ce phénomène porte le nom de **convection naturelle**.

EXEMPLE : **Convecteur électrique** (faire schéma)

Par ailleurs, il est également possible d'imposer un mouvement à des masses de fluide afin d'accélérer d'éventuels échanges thermiques par contact avec une paroi solide par exemple. On parle alors de **convection forcée**. Le mouvement de fluide entraîne ainsi, outre de la matière, un certain débit d'énergie thermique (puissance).

EXEMPLE : **Ventilation mécanique forcée (VMC)** : un hélice force le déplacement de masse d'air chaud (faire schéma)

I.2 Rayonnement

A la fin du XIX^{ième} siècle plusieurs physiciens comme Stephan, Wien et Boltzman se sont intéressés au transfert d'énergie par **rayonnement**. Leurs multiples découvertes sont notamment à l'origine des théories quantiques sur l'interaction matière-rayonnement.

Ce mode de transfert d'énergie se fait entre deux zones sans contact matériel (par exemple le rayonnement solaire nous parvient à travers le vide spatial)

EXEMPLES :

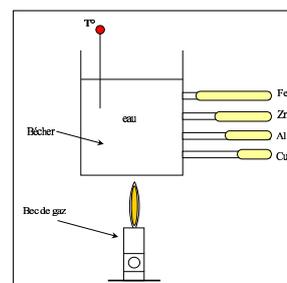
- ▶ Rayonnement solaire sur Terre.
- ▶ Rayonnement de la couche de CO_2 (effet de serre).
- ▶ Rayonnement braises dans un foyer de cheminée (on néglige absence de convection et conduction).

très simplement :

les corps chauds émettent un rayonnement électromagnétique de densité d'énergie : $u_{em} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_b T}} - 1}$

I.3 Diffusion ou conduction thermique dans les solides

L'énergie thermique peut également se transmettre dans la matière par phénomène de **diffusion**. C'est Jean-Baptiste Fourier au début du XIX^{ième} qui fut à l'origine de cette découverte, il énonça en particulier une loi phénoménologique décrivant ce phénomène. L'étude détaillée de ce mode de transfert est précisément l'objet des paragraphes



qui suivent.

L'expérience d'Ingen Ousz, décrite en 1879, montre que la diffusion est un phénomène étroitement lié à la nature du matériau.

Principe de l'expérience : Des tiges géométriquement identiques de matériaux thermiquement conducteurs sont enduites de cire ; l'une des extrémités des tiges est mise en contact avec un thermostat. On constate à tout instant que la longueur de cire fondue n'est pas identique pour toutes les tiges, mais dépend du matériau constitutif.

Conclusion :

- ▶ Le transfert thermique se fait des zones chaudes vers les zone froides.
- ▶ la nature du matériau est déterminante dans la vitesse du transfert thermique.

II Loi de Fourier

II.1 Flux thermique - flux thermique surfacique

Exactement comme l'analyse des transferts de charges qui permet de définir le courant électrique comme un flux, on définit le flux thermique (ou courant thermique) comme l'énergie thermique traversant une surface S par unité de temps soit :

$$I_Q = \mathcal{P}_Q = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

avec $[I_Q] \equiv W$

Par ailleurs, autour du point P de surface dS , le flux élémentaire dI_Q traversant la surface élémentaire dS permet de définir le flux surfacique $\varphi(P)$:

$$dI_Q = \varphi(P) \cdot dS$$

ce qui permet de définir la densité de flux thermique surfacique :

$$\varphi(P) = \frac{dI_Q}{dS} \quad \text{avec} \quad [\varphi] \equiv W.m^{-2}$$

NB : le flux thermique à travers une surface S peut donc s'écrire :

$$I_Q = \iint_S \varphi(P) \cdot dS$$

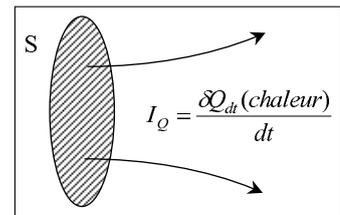


FIGURE XX.2 – Flux thermique à travers une surface

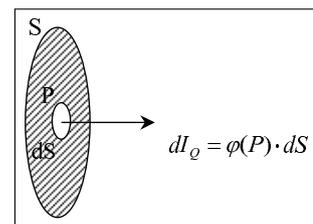


FIGURE XX.3 – Flux surfacique

REMARQUE - (II.1) - 1:

<p>Définissons un système élémentaire de surface d'une être et donc fictive, dans un régime thermique.</p>	<p>:continuité de $\varphi(P)$</p> <p>un système élémentaire d'épaisseur dz au tour d'une surface dS qui peut être non physique et donc fictive, dans un matériau un transfert thermique par</p>	<p>de $\varphi(P)$</p> <p>un système élémentaire d'épaisseur dz au tour d'une surface dS qui peut être non physique et donc fictive, dans un matériau un transfert thermique par</p>
--	---	---

FIGURE XX.4 – Continuité du flux thermique surfacique

L'énergie interne de ce système s'écrit :

$$\delta U = \rho \cdot u \cdot d\tau = \rho \cdot u \cdot dS \cdot dz$$

Le premier principe appliqué à ce système élémentaire d'énergie interne δU donne :

$$d(\delta U) = \delta Q^2$$

soit :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \frac{\delta Q^2}{dt} = dI_{Q_{total}} = dI_Q(0^-) - dI_Q(0^+) = (\varphi(0^-) - \varphi(0^+)) \cdot dS$$

soit si $dz \rightarrow 0$ alors $\delta U = 0 \Rightarrow d(\delta U) \rightarrow 0$

$$\boxed{\varphi(0^-) = \varphi(0^+)}$$

CONCLUSION : le flux surfacique est continu.

II.2 Vecteur densité volumique de flux thermique

Par analogie avec le courant électrique caractérisé par le vecteur densité volumique de courant, on peut définir un vecteur densité volumique de flux thermique \vec{J}_Q tel que :

$$\boxed{\varphi(P) = \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P)}$$

Ainsi,

► Le flux thermique élémentaire s'écrit :

$$\boxed{dI_Q(P) = \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS}$$

► Le flux thermique à travers la totalité de la surface :

$$I_Q = \iint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS \quad \text{ou} \quad I_Q = - \oiint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS$$

REMARQUE - (II.2) - 2:

- La continuité de φ impose également la continuité de \vec{J}_Q car $\vec{n}(P^-) = \vec{n}(P^+)$.
- Lorsque la surface S est fermée, on doit compter positivement l'énergie thermique entrant dans la surface, la normale étant orientée vers l'extérieur, la seconde expression de I_Q (sur l'intégrale fermée) comporte un signe -.

II.3 Champ de température - équilibre thermodynamique local (ETL)

DÉFINITION HABITUELLE DE LA TEMPÉRATURE¹ :

T est une variable intensive de tout système thermodynamique ; comme toute variable intensive, elle est définie uniquement en situation d'équilibre par :

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \quad \text{valable à l'équilibre uniquement}$$

donc : $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$

⇒ nécessité d'une homogénéité de T dans le système $T \neq f(x, y, z)$ (équilibre thermique).

DÉFINITION DE LA TEMPÉRATURE EN CONDUCTION THERMIQUE : ("entorse au réglage!!!")

inhomogénéité de température d'un "locus" avec son voisin, mais homogénéité à l'échelle de ce méso-système ⇒ on définit la température comme paramètre local de champ en appliquant l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local ou ETL :

$$T = T(P, t) \implies \text{la température devient une grandeur locale } T(x, y, z, t), \text{ c'est l'ETL!}$$

Critère de validité ETL : si l_c est la dimension de longueur caractéristique du méso-système et L_c la dimension caractéristique de la conduction de la chaleur alors ETL vérifié pour le méso-système si :

$$l_c \ll L_c$$

NB : la longueur L_c dépend des caractéristiques du système (gradient de température et conductivité) et doit être évaluée en situation.

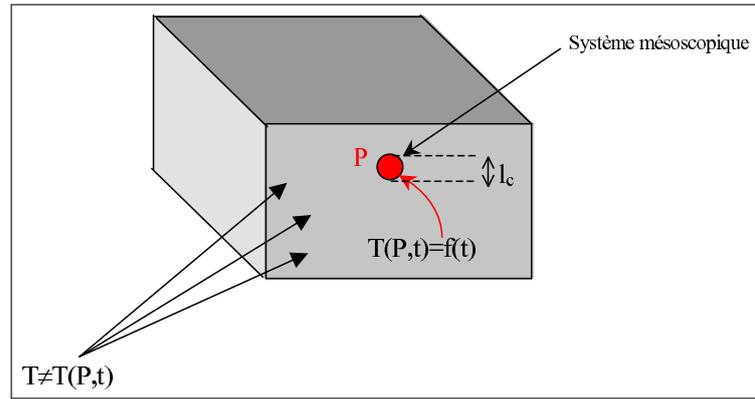


FIGURE XX.5 – Equilibre thermodynamique local (ETL)

II.4 Loi de Fourier (phénoménologique)

a - Enoncé

RAPPEL : Loi d'Ohm locale

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

⇒ L'inhomogénéité de potentiel provoque l'apparition d'un courant des potentiels forts vers les potentiels faibles.

IDÉE : comme l'inhomogénéité de T est responsable du transfert thermique, on construit une loi analogue :

$$\vec{J}_Q(P, t) = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T(P, t) \quad (\text{XX.1})$$

le coefficient λ étant la **conductivité thermique du matériau**.

NB : $[\lambda] = P.L^{-1}K^{-1} \equiv W.m^{-1}.K^{-1}$

On donne ci-dessous et à titre d'exemple quelques valeurs de ce coefficient pour divers matériaux :

Matériau	λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
Argent	418
Acier	16
Verre	1,2
laine de verre	40.10^{-3}
air	24.10^{-3}

b - Propriétés essentielles

► \vec{J}_Q est dirigé vers les zones de décroissance de la température locale.

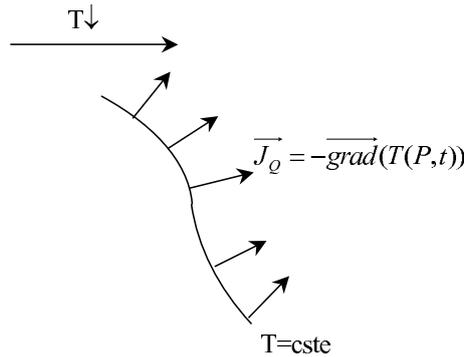
- \vec{J}_Q est normal aux surfaces isothermes.

Multiplions scalairement la loi de Fourier par l'élément de longueur vectoriel \vec{dl} d'un trajet curviligne quelconque :

$$\vec{J}_Q \cdot \vec{dl} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T) \cdot \vec{dl} = -\lambda dT$$

Si \vec{dl} est un élément de trajet isotherme ($dT = 0$), alors :

$$\vec{J}_Q \cdot \vec{dl} = 0$$



- La loi de Fourier est valide uniquement dans l'hypothèse d'un faible gradient de température ; typiquement $\Delta T \sim 100 \text{ K max}$ sur $1m$.
- La loi de Fourier est linéaire si l'on suppose $\lambda \neq f(T)$
- Dans un cas unidimensionnel (fréquent), la loi de Fourier prend la forme simple :

$$J_{Q,x}(x, t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \tag{XX.2}$$

III Les équations de la chaleur

III.1 Système thermique élémentaire - capacité thermique

On considère un système de faible dimension dit *système élémentaire* "découpé" dans un milieu **condensé** homogène de caractéristiques connues. On définit les caractéristiques suivantes du système :

- volume élémentaire : $d\tau$
- masse élémentaire : dm
- masse volumique : $\rho = \frac{dm}{d\tau}$
- énergie interne élémentaire : δU

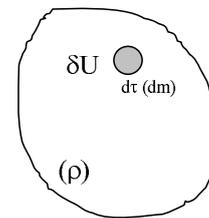


FIGURE XX.6 – Système thermique élémentaire

On définit la capacité thermique élémentaire du système par :

$$dC = \frac{d}{dT} (\delta U)$$

La capacité thermique volumique s'écrit par ailleurs :

$$c_{vol} = \frac{dC}{d\tau} = \underbrace{\frac{dC}{dm}}_{=c_m} \times \underbrace{\frac{dm}{d\tau}}_{=\rho}$$

d'où :

$$dC = c_{vol} \cdot d\tau = \rho c_m \cdot d\tau$$

REMARQUE - (III.1) - 3:

Comme le milieu est condensé, on a :

$$c_{m,P} = c_{m,V} = c_m$$

III.2 Ecriture du Premier Principe

a - Enoncé général

Si le système élémentaire de volume $d\tau$ subit une transformation élémentaire de durée dt par échange de travail et chaleur avec l'extérieur, le premier principe s'écrit pour l'intervalle de temps dt :

$$d(\delta U)_{dt} = \delta^2 Q + \delta^2 W$$

avec $\delta^2 W = \delta^2 W_{pression} + \delta^2 W_{autre}$

Ramené à l'unité de temps, ce bilan de puissance élémentaire devient à volume constant qui constitue le cas le plus fréquent dans notre étude :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \underbrace{\frac{\delta^2 Q}{dt}}_{=dI_Q} + \frac{\delta^2 W}{dt} \stackrel{V=cste}{=} dI_Q + \frac{\delta^2 W_{autre}}{dt} = dI_Q + d\mathcal{P}_{autre}$$

En outre, d'après la définition de la capacité thermique dC on peut écrire :

$$d(\delta U) = dC \cdot dT = \rho c_m \cdot d\tau \cdot dT \quad \text{soit} \quad \frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

En égalisant les deux derniers résultats, on dégage l'expression générale du premier principe :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = dI_Q + d\mathcal{P}_{autre} \tag{XX.3}$$

b - Enoncé "détaillé" : avec sources et puits (apport énergétique volumique)

HYPOTHÈSE (CLASSIQUE POUR CE CHAPITRE) : système solide indéformable \Rightarrow les sources de travail ont une origine autre que les efforts de pression.

QUESTION : origine et expression de $\frac{\delta^2 W_{autre}}{dt}$???

On recense 2 causes classiques :

► *Puissance volumique Joule cédée (source) par un courant électrique interne au système :*

$$+d\mathcal{P}_{autre} = \frac{\delta^2 W_{autre}}{dt} = d\mathcal{P}_{el} = \vec{J}_{el} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{J_{el}^2}{\gamma} d\tau$$

d'où la puissance volumique :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}_{el}}{d\tau} = \sigma_{el} = \frac{J_{el}^2}{\gamma}}$$

► *Puissance volumique cédée (source) ou consommée (puits) par une réaction chimique ou nucléaire :*

$$+d\mathcal{P}_{autre} = \frac{\delta^2 W_{autre}}{dt} = d\mathcal{P}_r = \sigma_r \cdot d\tau$$

avec la puissance volumique :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}_r}{d\tau} = \sigma_r}$$

Finalement, dans l'un ou l'autre des deux cas, on retiendra simplement : $\frac{\delta^2 W_{autre}}{dt} = d\mathcal{P} = \sigma \cdot d\tau$ avec σ puissance volumique cédée au système.

Conséquence : le bilan d'énergie (1^{er} principe pour les solides $V = cste$) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = dI_Q + \sigma \cdot d\tau} \quad (XX.4)$$

III.3 Bilans locaux d'énergie et établissement de l'équation de diffusion thermique à 1D

a - Géométrie cartésienne 1D

EQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE :

Considérons le cas d'un système indéformable d'axe $[Ox]$, de surface de base S , siège d'un courant thermique de densité $\vec{J}_Q(x, t)$. On considère le problème ne dépendant spatialement que de la variable x , mais non nécessairement stationnaire (mais à constante de temps élevée) :

$$\boxed{\text{système 1D} \Leftrightarrow \vec{J}_Q = \vec{J}_Q(x, t)}$$

On néglige les flux thermiques latéraux.

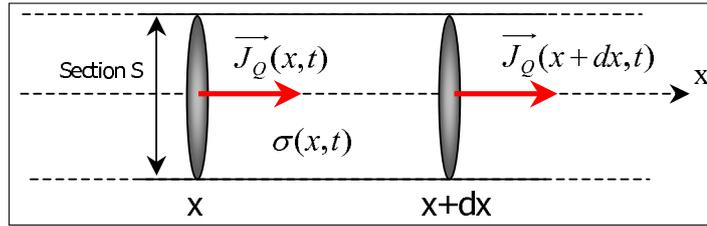


FIGURE XX.7 – Diffusion thermique unidimensionnelle axiale

Soit le système thermique élémentaire de longueur dx et de base S (tranche élémentaire).

Les échanges thermiques se produisant sur les deux faces uniquement, évaluons les flux thermiques échangés sur chaque face ; on a :

► en x :

$$I_Q(x, t) = \iint_{S(x)} \vec{J}_Q(x, t) \cdot d\vec{S} = \vec{J}_Q(x, t) \cdot \vec{e}_x S = J_Q(x, t) \cdot S$$

► en $x + dx$:

$$I_Q(x + dx, t) = \iint_{S(x+dx)} \vec{J}_Q(x + dx, t) \cdot d\vec{S} = \vec{J}_Q(x + dx, t) \cdot \vec{e}_x S = J_Q(x + dx, t) \cdot S$$

Le bilan algébrique de flux thermique donne ensuite :

$$dI_Q = I_Q(x, t) - I_Q(x + dx, t) = [J_Q(x, t) - J_Q(x + dx, t)] S$$

soit après DL1 :

$$dI_Q = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} d\tau$$

Le premier principe s'écrit alors pour ce système (1D), en considérant une éventuelle source de puissance volumique σ :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} d\tau + \sigma \cdot d\tau = \rho c_m \cdot \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau$$

soit encore en posant l'énergie interne volumique du système $u = \frac{\delta U}{d\tau}$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + \sigma = \rho c_m \cdot \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau \quad (\text{XX.5})$$

EQUATION DE LA DIFFUSION :

On rappelle que :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho \cdot c_m d\tau \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

En injectant dans ce dernier résultat l'équation de conservation de l'énergie, il vient :

$$\rho \cdot c_m d\tau \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial J_Q}{\partial x} + \sigma \right] d\tau$$

qui donne après simplification :

$$\rho \cdot c_m \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + \sigma \quad (\text{XX.6})$$

Enfin, en injectant la loi de Fourier réduite à une dimension $J_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ dans cette équation, on dégage finalement l'équation de la chaleur à 1D :

$$\rho \cdot c_m \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \sigma \quad (\text{XX.7})$$

soit encore :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{\rho c_m} \quad \text{Equation de diffusion de la chaleur 1D} \quad (\text{XX.8})$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_m}$ diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique.

NB : $[D] = L^2 \cdot T^{-1} \equiv m^2 \cdot s^{-1}$

REMARQUE - (III.3) - 4:

On retrouve une équation de diffusion type "équation de Fourier" rencontrée dans l'étude de l'effet de peau 1D : $\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2}$ avec $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$ coefficient de diffusion de même dimension.

b - Géométrie cylindrique

EQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE :

On considère cette fois un système cylindrique creux de rayons interne et externe R_1 et R_2 , de hauteur $h \gg R_1, R_2$ supposée assez importante pour négliger tout effet de bord.

Cette géométrie impose un problème radial 1D :

$$\text{géométrie cylindrique invariante par translation selon } [Oz) \Leftrightarrow \vec{J}_Q = J_Q(r, t) \cdot \vec{e}_r$$

On isole un système élémentaire compris entre les rayons r et $r + dr$ (hauteur h) dans ce cylindre :

$$d\tau = 2\pi r h dr$$

Réalisons un bilan des flux thermiques sur les faces interne (r) et externe ($r + dr$) de ce système élémentaire :

► en r :

$$I_Q(r, t) = \iint \vec{J}_Q(r, t) \cdot \vec{e}_r dS = 2\pi r h \cdot J_Q(r, t)$$

► en $r + dr$:

$$I_Q(r + dr, t) = \iint \vec{J}_Q(r + dr, t) \cdot \vec{e}_r dS = 2\pi(r + dr)h \cdot J_Q(r + dr, t)$$

Le bilan algébrique de flux thermique donne :

$$dI_Q = I_Q(r, t) - I_Q(r + dr, t) = 2\pi h [r \cdot J_Q(r, t) - (r + dr) \cdot J_Q(r + dr, t)]$$

soit :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -2\pi h \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} dr$$

Enfin, en multipliant haut et bas par r dans le second membre :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} \underbrace{2\pi r dr h}_{=d\tau}$$

soit finalement :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} d\tau$$

En écrivant le premier principe, et en considérant d'éventuelles sources de puissance thermique, il vient le bilan de conservation d'énergie suivant :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} d\tau + \sigma \cdot d\tau$$

soit :

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} + \sigma \tag{XX.9}$$

EQUATION DE LA DIFFUSION :

La loi de Fourier s'écrivant $J_Q(r, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \Big|_{\vec{e}_r} = -\lambda \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$ pour un problème ne dépendant que de la variable radiale cylindrique, l'équation de la chaleur devient :

$$\rho c_m \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = +\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + \sigma$$

soit finalement :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = +D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + \frac{\sigma}{\rho c_m} \tag{XX.10}$$

c - Géométrie sphérique

A TITRE D'INFORMATION : EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = +D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \quad (\text{XX.11})$$

d - Cas général 3D

Reprenons l'expression du premier principe établi sur le système élémentaire de volume $d\tau$, partie d'un système macroscopique de volume V , soit :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau = dI_Q + \sigma \cdot d\tau$$

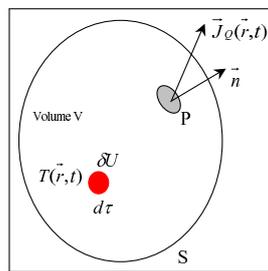


FIGURE XX.8 – Diffusion thermique 3D

Intégrons l'équation ci-dessus sur le volume total V du système ; il vient :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \int_{\Sigma(V)} dI_Q + \iiint_V \sigma \cdot d\tau = - \oint_{S/V} \vec{J}_Q \cdot \vec{dS} + \iiint_V \sigma \cdot d\tau$$

En outre, le théorème de Stokes permet de dégager l'égalité suivante :

$$\iiint_V \rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = - \iiint_V [\text{div}(\vec{J}_Q) + \sigma] \cdot d\tau$$

d'où l'on tire en identifiant les intégrands :

$$\rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{J}_Q) + \sigma$$

En injectant la loi de Fourier dans cette dernière équation, il vient :

$$\rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \sigma$$

On en déduit finalement l'équation générale de la diffusion thermique à laquelle satisfait la température du système :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = +D \Delta T + \frac{\sigma}{\rho c_m} \quad (\text{Equation de la diffusion généralisée à 3D}) \quad (\text{XX.12})$$

e - Propriétés de l'équation de diffusion thermique

- ▶ L'équation de diffusion est en dérivée d'ordre 2 par rapport à l'espace $\stackrel{1D}{\Rightarrow}$ si $T(x, t)$ est solution, alors $T(-x, t)$ l'est aussi.
- ▶ L'équation de diffusion est en dérivée d'ordre 1 par rapport au temps, elle est non invariante par renversement du temps \Rightarrow la diffusion thermique est un phénomène irréversible :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D\Delta T(x, t) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \xrightarrow{t \rightarrow -t} -\frac{\partial T(x, -t)}{\partial t} = D\Delta T(x, -t) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \neq \text{équation de la diffusion}$$

- ▶ L'équation de diffusion est linéaire \Rightarrow toute combinaison linéaire de solutions est solution.

f - Conditions initiales et aux limites en 1D - conditions aux limites classiques

L'équation de la diffusion thermique sans source s'écrit en version 1D cartésienne :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$

- ▶ La dérivée temporelle est d'ordre 1,
 \Rightarrow nécessite une seule C.I. pour une résolution complète
 ex : $T(x, 0)$ (en 3D : $T(\vec{r}, t)$)
- ▶ La dérivée seconde est d'ordre 2,
 \Rightarrow nécessite deux C.L. fixées pour une résolution complète
 ex : $T(x = 0, t)$ et $T(x = L, t)$ (en 3D : $T(\vec{r}, t)$)

Parmi les C.L. les plus classiques, on trouve :

- ◇ Système en contact avec un thermostat à l'abscisse $x = L$ (problème 1D) \Rightarrow Température de surface fixée :

$$T(L) = T_{thermo}$$

- ◇ Surface parfaitement calorifugé à l'abscisse $x = L \Rightarrow$:

$$\vec{J}_Q \Big|_{x=L} \cdot \vec{n}_{surf} = 0$$

- ◇ Contact entre deux solides différents à l'abscisse $x = L \Rightarrow$ continuité du flux thermique de part et d'autre de l'interface :

$$I_Q(L^-) = I_Q(L^+) \quad \Rightarrow \quad \varphi(L^-, t) = \varphi(L^+, t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}_Q(L^-, t) \cdot \vec{n}_{-+} = \vec{J}_Q(L^+, t) \cdot \vec{n}_{-+}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}_Q(L^-, t) = \vec{J}_Q(L^+, t)$$

g - Temps caractéristique de la diffusion : analyse dimensionnelle et nombre de Fourier

QUESTION : comment dégager un temps caractéristique τ_c de la diffusion thermique en fonction des caractéristiques intrinsèques du système i.e. (λ , *dimension*) ?

◇ PAR ANALYSE DIMENSIONNELLE "CLASSIQUE".

Prenons comme caractéristiques intrinsèques du système : $\begin{cases} L_c : \text{longueur caractéristique} [L_c] = L \\ D : \text{diffusivité du matériau} [D] = L^2 T^{-1} \end{cases}$

Méthode : on veut former une grandeur homogène à un temps avec L_c et D . Posons :

$$\tau_c = L_c^\alpha \cdot D^\beta$$

soit :

$$[\tau_c] = T = L^{\alpha+2\beta} T^{-\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Bilan :

$$\tau_c = \frac{L_c^2}{D}$$

◇ PAR ANALYSE DE LA STRUCTURE DE L'ÉQUATION.

Supposons un système thermique unidimensionnel de variable d'espace x que l'on soumet, à partir du régime stationnaire, à une brusque variation de température de valeur ΔT sur une longueur caractéristique typique L_c . Appelons τ_c le temps caractéristique de relaxation du système, i.e. le temps nécessaire pour retrouver le régime permanent.

En traduisant en terme d'ordre de grandeur l'équation de la chaleur à partir de ces grandeurs élémentaires typiques, il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\tau_c} \equiv D \frac{\Delta T}{(L_c)^2}$$

On peut alors dégager l'expression du temps caractéristique d'évolution, avec :

$$\tau_c \simeq \frac{L_c^2}{D} \tag{XX.13}$$

Cette relation peut alors être adaptée à la géométrie du problème, permettant de dégager τ_c dans des cas simples, par exemple :

GÉOMÉTRIE	Type "Mur"	Sphérique	Cylindrique plate	Cylindrique longue
DIMENSION(S)	Epaisseur e	Rayon R	Rayon R , hauteur h	Rayon R , longueur L
DIMENSION CARACTÉRISTIQUE	e	R	$R (\gg h)$	$L (\gg R)$
τ_c	$\simeq \frac{e^2}{D}$	$\simeq \frac{R^2}{D}$	$\simeq \frac{R^2}{D}$	$\simeq \frac{L^2}{D}$

DÉFINITION - (III.3) - 1:

On définit le nombre de Fourier :

$$F(t) = \frac{t}{\tau_c} = \frac{tD}{L_c^2} \Rightarrow \begin{cases} F(t \gg \tau_c) \gg 1 : \text{régime permanent établi} \\ F(t \ll \tau_c) \ll 1 : \text{régime transitoire} \end{cases}$$

III.4 Création d'entropie par diffusion thermique

Reprenons ici le cas de la diffusion thermique 1D (sans source) sur un barreau de section A (nouvelle désignation afin d'éviter toute confusion avec la fonction entropie S !!). L'identité thermodynamique (grandeurs énergie interne et entropie volumiques u et s) s'écrit :

$$dU = TdS - PdV \xrightarrow{V=cste \text{ (solide)}} du = Tds$$

soit localement : $\frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t}$

qui devient avec l'équation locale de conservation de l'énergie ($\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x}$) :

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} \implies \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T} \frac{\partial J_Q}{\partial x} \quad (e)$$

Le second principe écrit pour le système compris entre les abscisses x et $x + dx$, et pour une transformation élémentaire de durée dt est :

$$d(\delta S) = \underbrace{\delta(\delta S)^e}_{\text{entropie échangée}} + \underbrace{\delta(\delta S)^c}_{\text{entropie créée}}$$

soit :

$$\frac{\partial s}{\partial t} A dx dt = \frac{J_Q(x,t)}{T(x,t)} A dt - \frac{J_Q(x+dx,t)}{T(x+dx,t)} A dt + \sigma_s A dx dt$$

avec σ_s taux volumique de création d'entropie.

donc :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_Q}{T} \right) + \sigma_s$$

En injectant l'équation (e) dans cette dernière expression, on obtient :

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial J_Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_Q}{T} \right) + \sigma_s$$

soit :

$$\sigma_s = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_Q}{T} \right) - \frac{1}{T} \frac{\partial J_Q}{\partial x} = J_Q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{J_Q}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Avec la loi de Fourier 1D, ce dernier résultat devient finalement :

$$\sigma_s = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \geq 0 \quad \text{!!!!} \quad (\text{XX.14})$$

NB : on dégage évidemment un taux de création d'entropie toujours positif ou nul. Dans le cas de la diffusion, phénomène irréversible par essence, la solution strictement positive seule est à retenir.

III.5 Résolution de l'équation de la chaleur

a - Exemple (très simple) de résolution analytique en régime permanent : barreau 1D

On envisage ici un conducteur thermique cylindrique dont les dimensions de la section S sont très petites face à la longueur. On appelle $[Ox]$ son axe. On suppose le régime permanent et l'absence de terme de source ou puits,

$$\text{soit : } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas l'équation de la diffusion s'écrit simplement :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$$

soit après une première intégration :

$$\frac{dT}{dx} = A = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda}$$

et après une seconde intégration :

$$T(x) = Ax + B = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda} \times x + B$$

La variation de température est donc une fonction linéaire décroissante de la position.

Imaginons que les deux extrémités du cylindre en $x = 0$ et $x = L$ soient maintenues à des températures connues respectivement T_1 et T_2 avec $T_2 < T_1$, alors :

$$\begin{cases} T(0) = T_1 = B \\ \text{et} \\ T(L) = T_2 = AL + B \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{L} = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda} \\ B = T_1 \end{cases}$$

D'où la fonction température :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

On constate, dans ce cas simple, une évolution affine de la température entre les deux frontières aux températures imposées.

b - Exemple (simple !) de résolution numérique en régime non permanent : « choc thermique » sur un barreau 1D

→ diaporama Python.

IV Résistance et conductance thermiques en RP/ARQS thermique

IV.1 Expressions

a - Système de géométrie cartésienne

Reprenons le système précédent 1D de géométrie cylindrique, d'axe [Ox), de longueur L , et de section S soumis aux températures T_1 et $T_2 (< T_1)$ à ses extrémités.

La loi de Fourier fournit l'expression du vecteur densité de courant thermique :

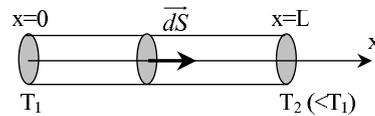


FIGURE XX.9 – Barreau soumis à une différence de température

$$\vec{J}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot \vec{e}_x = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot \vec{e}_x$$

Par ailleurs, en introduisant le flux thermique à travers la section transverse du barreau :

$$I_Q = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \vec{dS} = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \times S$$

En rappelant l'analogie électro-thermique suivante :

$$\begin{cases} V \leftrightarrow T \\ I \leftrightarrow I_Q \end{cases}$$

On peut alors définir, toujours par analogie avec l'électricité, les résistance et conductance thermiques, soient respectivement :

$$R_{elec} = \frac{\Delta V}{I} \quad \leftrightarrow \quad R_Q = \frac{T_1 - T_2}{I_Q} = \frac{L}{\lambda S} \quad (XX.15)$$

et

$$G_{elec} = \frac{I}{\Delta V} \quad \leftrightarrow \quad G_Q = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{L} \quad (\text{XX.16})$$

b - Système de géométrie cylindrique

On envisage un système de géométrie cylindrique sans effet de bord, de rayons interne R_1 et externe R_2 , dont les surfaces sont maintenues aux températures respectives $T(R_1)$ et $T(R_2)$ avec $T(R_1) > T(R_2)$. On suppose le régime thermique permanent.

Il y a conservation du flux thermique sur un cylindre de rayon $r \in [R_1, R_2]$ et de hauteur h quelconque, on a :

$$I_Q = \iint \vec{J}_Q \cdot \vec{n} dS = 2\pi r h J_Q(r) = -2\pi r j \lambda \frac{dT}{dr}$$

soit en séparant les variables :

$$I_Q \frac{dr}{r} = -2\pi h \lambda dT$$

qui donne en intégrant entre R_1 et R_2 :

$$I_Q \ln \frac{R_2}{R_1} = -2\pi h \lambda [T(R_2) - T(R_1)] \quad (\text{XX.17})$$

On isole ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_Q(cyl) = \frac{T(R_1) - T(R_2)}{I_Q} = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi h \lambda} \quad (\text{XX.18})$$

On peut également dégager le profil de température en intégrant entre R_1 et $r < R_2$, soit :

$$I_Q \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) = -2\pi h \lambda [T(r) - T(R_1)]$$

En divisant par l'équation [XX.17](#), on en tire l'expression du profil de température :

$$T(r) = [T(R_2) - T(R_1)] \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + T(R_1)$$

REMARQUE - (IV.1) - 5:

Cette méthode d'intégration directe est à privilégier lorsque l'énoncé ne fournit pas l'expression de l'opérateur Laplacien scalaire dans le système de coordonnées adapté au problème. Dans le cas contraire, il est facile d'intégrer l'équation de la chaleur.

c - Système de géométrie sphérique

On suppose un système sphérique de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 .

Si la température du système possède une géométrie sphérique isotrope type $T(r)$ (toujours en régime permanent), alors les zones de conservation du flux thermique sont maintenant des sphères de rayon $r \in [R_1, R_2]$. On peut écrire :

$$I_Q = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 J_Q(r) = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr}$$

qui donne par séparation des variables :

$$I_Q \frac{dr}{r^2} = -4\pi \lambda dT$$

et par intégration :

$$I_Q \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = 4\pi \lambda [T(R_1) - T(R_2)]$$

soit finalement la résistance thermique :

$$R_{th}(sph) = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4\pi \lambda} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \lambda R_1 R_2} \tag{XX.19}$$

On tire également facilement l'expression du profil de température :

$$T(r) = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} [T(R_2) - T(R_1)] + T(R_1)$$

IV.2 Lois d'association

On considère deux matériaux de conductivités différentes en contact sur une section commune et siège d'un même flux thermique Φ . Réalisons encore une fois l'analogie avec le domaine électrique :

NB : la continuité de \vec{J}_Q à l'interface entre les deux milieux impose la continuité de la température sinon (par exemple pour un Pb 1D) $|\vec{J}_Q| = \lambda \underbrace{\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$.

HYPOTHÈSE : contact parfait à l'interface entre les deux milieux.

◇ EN SÉRIE En formant la différence de température en entrée et sortie de l'association, il vient :

$$T_1 - T_3 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) = [R_{Q_1} + R_{Q_2}] \times I_Q$$

ainsi la résistance thermique équivalente s'écrit :

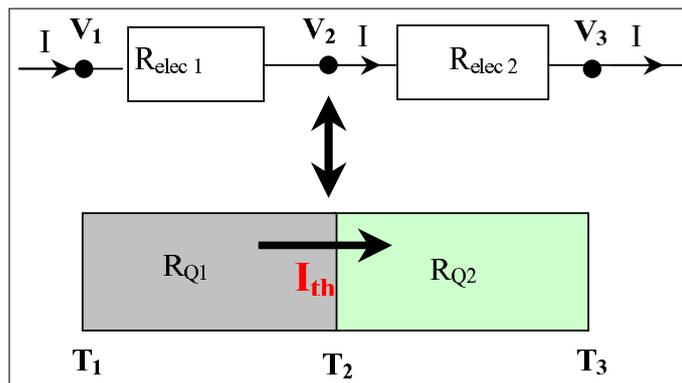


FIGURE XX.10 – Association "en série" de résistances thermiques

$$R_{Q_{tot}} = \frac{T_1 - T_3}{I_Q} = R_{Q_1} + R_{Q_2} \quad (XX.20)$$

EXEMPLE : mur entouré de deux isolants

$$R_{Q_{tot}} = R_{Q_1} + R_{mur} + R_{Q_2} = \frac{L_1}{\lambda_1 S} + \frac{L_{mur}}{\lambda_{mur} S} + \frac{L_2}{\lambda_2 S}$$

◇ EN PARALLÈLE : Si l'association est maintenant faite «en parallèle», c'est cette fois le flux thermique qui se subdivise en autant de dérivation. Soit par exemple pour une dérivation en deux résistances :

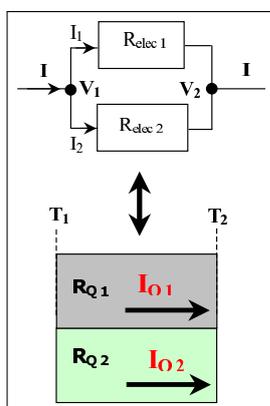


FIGURE XX.11 – Association "en parallèle" de résistances thermiques

Cette fois, il convient de sommer les flux thermiques soit :

$$I_{Q_{tot}} = I_{Q_1} + I_{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{Q_1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{Q_2}} = (T_1 - T_2) [G_{Q_1} + G_{Q_2}]$$

On en déduit la conductance thermique équivalente de cette association :

$$G_{Q_{tot}} = \frac{I_{Q_{tot}}}{T_1 - T_2} = G_{Q_1} + G_{Q_2} \quad (XX.21)$$

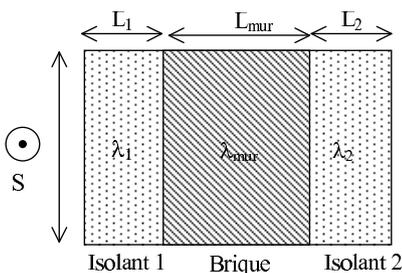
IV.3 Analogie importante : conductions thermique et électrique

GRANDEUR THERMIQUE	GRANDEUR ÉLECTRIQUE
\vec{J}_Q	\vec{J}
$P_Q = I_Q = \iint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS$	$I = \iint_S \vec{J}(P) \cdot \vec{n}(P) dS$
$T(P)$	$V(P)$
λ	γ
$\vec{J}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$	$\vec{J} = -\gamma \overrightarrow{grad}(V)$
$R_Q(1D) = \frac{L}{\lambda S}$	$R_{elec} = \frac{L}{\gamma S}$
$I_Q = C_{th} \frac{dT}{dt}$	$I = C \frac{dV}{dt}$

V Conducto-convection

V.1 Flux convectif et coefficient conducto-convectif h

a - Loi de Newton



Supposons une surface de matériau solide localement plane à la température T_p en contact avec un écoulement fluide dont la vitesse est parallèle à la surface. Compte tenu de la viscosité du fluide, il existe une zone appelée «couche limite» d'épaisseur δ_l dans laquelle la vitesse du fluide diminue pour finalement s'annuler au contact de la surface du matériau (CL pour un fluide vis-

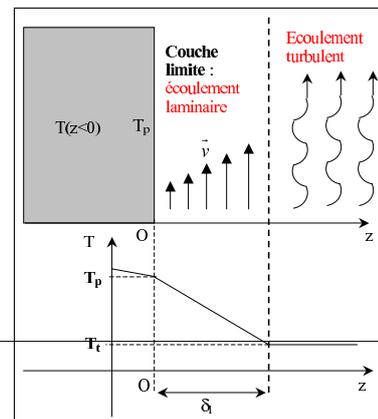


FIGURE XX.12 – Transfert thermique conducto-convectif

queux).

QUESTION : A priori, échange entre la surface et le fluide. Comment écrire les échanges thermiques entre le matériau solide et le fluide ?

Hypothèses :

- ◇ Couche limite : δ_l zone d'écoulement laminaire (température non homogène en absence de turbulence)
- ◇ Problème "1D" + régime permanent $\implies T(z)$
- ◇ Profil de $T(z)$ linéaire dans δ_l
- ◇ Echange par conduction dans δ_l (hypothèse "forte" !!!)

Dans la couche limite de l'écoulement fluide de conductivité λ_f , c'est à dire pour $0 < z < \delta_l$, on peut utiliser un modèle de conduction, en négligeant toute turbulence d'homogénéisation au voisinage de la surface :

$$\vec{J}_Q = -\lambda_f \left(\frac{dT}{dz} \right)_{0+} \vec{e}_z \stackrel{\text{prof.lin}}{\sim} -\lambda_f \frac{(T_f(\delta_l) - T_p)}{\delta_l} \vec{e}_z$$

ainsi, le flux thermique surfacique conducto-convectif s'écrit :

$$\varphi_{interf}^{cc} = \vec{J}_Q \cdot \vec{e}_z = -\lambda_f \frac{[T_f(\delta_l) - T_p]}{\delta_l} = h [T_p - T_f(\delta_l)] \quad (\text{Loi de la convection de Newton}) \tag{XX.22}$$

avec :

$$h = \frac{\lambda_f}{\delta_l} \quad \text{coefficient de transfert convectif}$$

NB : $[h] = P.L^{-2}.K^{-1} \equiv W.m^{-2}.K^{-1}$

b - Résistance conducto-convective

Dans le cas d'un transfert conducto-convectif entre une paroi solide de surface S et un fluide de températures respectives T_p et T_f ($T_p > T_f$),

on peut écrire le flux thermique conducto-convectif :

$$I_Q^{cc} = \varphi \times S = h(T_p - T_f)S$$

et définir la résistance thermique de conducto-convection par :

$$R_Q = \frac{T_p - T_f}{I_Q} = \frac{1}{hS} \tag{XX.23}$$

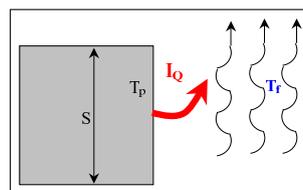


FIGURE XX.13 – Flux thermique conducto-convectif

EXEMPLE : mur avec isolant et contact avec fluide de part et d'autre.

D'après la loi d'association des résistances série, on a immédiatement :

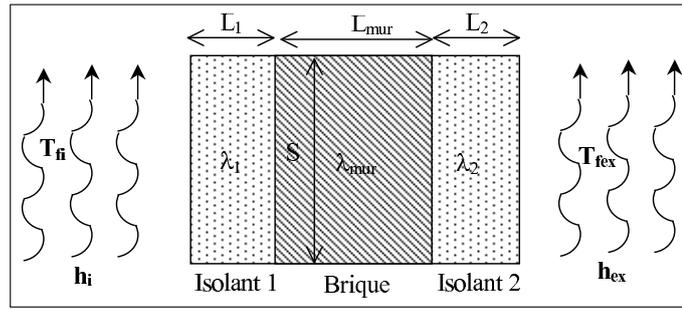


FIGURE XX.14 – Résistance totale d'un mur isolé avec conducto-convection

$$R_{Q_{tot}} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_{mur}}{\lambda_{mur}} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_{ex}} \right)$$

V.2 Concurrence conducto-convection et conduction : le nombre de Biot

! DÉFINITION - (V.2) - 2:

Nombre sans dimension qui compare la conducto-convection en surface d'un matériau avec la conduction thermique au sein de celui-ci :

$$B = \frac{|\varphi^{cond-conv}|}{|\varphi^{conduc}|} \sim \frac{h\Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{L_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L_c : \text{longueur caractéristique de variation de } T \\ \Delta T : \text{écart caractéristique de température} \end{cases}$$

soit :

$$B = \frac{hL_c}{\lambda}$$

INTERPRÉTATION :

Ecrivons la continuité du flux thermique sur l'interface lieu de conducto-convection :

$$\varphi^{cond}(0^-) = \varphi^{cc}(0^-) \Leftrightarrow J_Q^{cond}(0^-) = J_Q^{cc}(0^+) \Leftrightarrow \lambda \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0^-} = h |T_p - T_f|$$

soit :

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0^-} = \frac{hL_c}{\lambda} \frac{|T_p - T_f|}{L_c} = B \frac{|T_p - T_f|}{L_c}$$

◇ Si $B = \frac{hL_c}{\lambda} \ll 1$: régime essentiellement de conduction.

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0^-} = B \frac{|T_p - T_f|}{L_c} \ll \frac{|T_p - T_f|}{L_c} \quad \text{mauvaise efficacité d'échange en surface}$$

ainsi, le gradient de température dans le matériau est très faible par rapport au gradient de surface → la température est quasi-homogène dans le matériau.

◇ Si $B = \frac{hL_c}{\lambda} \gg 1$: régime essentiellement de conducto-convection.

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0^-} = B \frac{|T_p - T_f|}{L_c} \gg \frac{|T_p - T_f|}{L_c} \quad \text{bonne efficacité d'échange en surface}$$

le gradient de température dans le matériau est cette fois très important vis à vis du gradient de surface, et en particulier à proximité de la surface.

Exemple : système de refroidissement d'un processeur.

VI Applications

VI.1 Exemple 1 : température d'une cave (ondes thermiques)

Supposons un problème unidimensionnel selon $[Ox)$, dans lequel la température en $x = 0$ subit une variation sinusoïdale (modélisation grossière des saisons par exemple) autour d'une valeur moyenne T_m :

$$T(0, t) = \theta_m \times \cos \omega t + T_m$$

T_m désignant une température moyenne.

Posons $\theta(x, t) = T(x, t) - T_m$

Postulons que la solution est de la forme :

$$\theta(x, t) = \theta(x) \times \cos(\omega t)$$

En formalisme complexe, l'équation de la diffusion devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - j \frac{\omega}{a} \theta = 0$$

Exercice de cours: (VI.1) - n° 1 Résolution du régime harmonique

❶ Montrer que la solution finale s'écrit pour $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \theta_m \times e^{-\frac{x}{\delta}} \times \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) + T_m$$

avec δ que l'on précisera en fonction de a et ω , et dont on indiquera la dimension.

❷ Indiquer des analogies avec d'autres phénomènes relatifs à d'autres branches de la physique.

❸ A quelle profondeur faut-il enterrer une cave pour limiter les fluctuations thermiques annuelles? On donne pour le sol $D = 0,28 \cdot 10^{-6}$ S.I..

VI.2 Exemple 2 : expérience d’Ingenhouz (à faire en "live" !!!)

On étudie un fil cylindrique d’axe $[Ox]$ de rayon r de longueur L , constitué d’un matériau de conductivité thermique λ . L’extrémité $x = 0$ est maintenue à la température T_1 ; l’extérieur est à la température T_e . La puissance perdue par un élément de fil de surface σ , de température T en contact avec l’air extérieur en mouvement est donné par la loi de Newton :

$$\mathcal{P} = h(T - T_e)\sigma$$

On se placera en régime permanent.

- ❶ Etablir l’équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
- ❷ Si on suppose L suffisamment long (condition à préciser), déterminer $T(x)$.
- ❸ On considère deux fils identiques, l’un en cuivre, l’autre en étain, recouverts de paraffine. La paraffine fond à 60°C . On note qu’elle fond en $x_1 = 15,6 \text{ cm}$ pour le fil de cuivre et en $x_2 = 6,4 \text{ cm}$ pour le fil en étain. Déterminer la conductivité thermique de l’étain sachant que celle du cuivre est $\lambda_{Cu} = 390 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (le coefficient de convection h est le même pour les deux fils).
- ❹ Déterminer la puissance perdue par le fil vers l’air extérieur (on donnera deux méthodes de résolution).
- ❺ Que devient cette étude si L n’est pas suffisamment grand ? (étude délicate !!!)